東の n-分配性について

芝　　原　　　茂

I. 序　　論

束論の分野の論文の中に，a）射影幾何，b）群の部分束，などの理論の間の確実な関連を示す多くのものがある（例えば，BAKER [1], JÓNSSON [7] など)。これらの領域と分配束の理論とを結ぶものとして，A. P. HUHN は1971年に弱分配束の概念を束論に導入した(HUHN [4])。本稿においては，n–分配束の判定条件を利用して，n–分配束の双対性について考察し，さらに，束のイデアル束が n–分配的である条件を示したい。

1.1. 定義. モジュラ束 L が，任意の $n+2$ 個の元 $x, y_0, \cdots, y_n \in L$ に対して，次の恒等式 D_n を満たすとき，L **は** n**–分配的**であるという。

$$D_n : x \cup \bigcap_{i=0}^{n} y_i = \bigcap_{j=0}^{n} [x \cup \bigcap_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} y_i]$$

D_n の双対の恒等式 D_n^* が満たされるとき，**双対 n–分配的**という（しかし，n–分配束の primitive class $\boldsymbol{D}_n$ と双対 n–分配束の primitive class $\boldsymbol{D}_n^*$ とは同一である)。ある自然数 $n>1$ に対して D_n を満たす束を弱分配束という。

HUHN は，n–分配束の応用例として，a)，b）の領域からの基本的な成果をまず挙げている。そして，それとの関連において，n–分配束の性質を研究した（HUHN [6])。

ad a) 斜体 (skew field) D に対して，D の上の $(n-1)$–次元射影幾何（即ち n–次元ベクトル空間の部分空間束）$PG_{n-1}(D)$ は n–分配束であるが，$(n-1)$–分配束ではない。[(1)]

ad b) アーベル群 G に対して，G の部分束が n-分配束であるのは，G の有限階数が n に等しいか又はそれより小さいときそのときのみである。

II. 双　対　性

HUHN は BIRKHOFF の分配性の判定条件を一般化して，n-分配性の判定条件を得た。

2.1. n-分配性の判定条件. L をモジュラ束とする。任意の自然数 n に対して，次 2 つの命題は同値である。

(A) **L は n-分配的でない。**

(B) **L は $(n+1)$-次元ブール代数[2] B を部分束として含み，かつ次の性質 $K(B,w)$ を持つ 1 つの元 w を含んでいる。$K(B,w)$: w は B のすべての原子元の，区間 [inf B, sup B] における相対補元である[3]** (HUHN [5])。

この判定条件から，n-分配束に対して双対原理の成り立つことが，次のように示される。

2.2. 定理. 類 D_n は類 D_n^* と同一である (HUHN [5])。

証明. モジュラ束において，任意の $2n$ 個の元 $p_1, \cdots, p_n$, $q_1, \cdots, q_n$ に対して，$i \neq j$ ならば $p_i \geqq q_j$ であるとき，次の等式が成り立つことはよく知られている：

(1) $$\bigcap_{i=1}^{n} p_i \cup \bigcup_{i=1}^{n} q_i = \bigcap_{i=1}^{n} (p_i \cup q_i).$$ [4]

さて，n-分配性の判定条件とその双対とによって，次のことを示せば十分である：

モジュラ束が $(n+1)$-次元ブール代数 B を部分束として含み，かつ性質 $K(B,w)$ を持つ 1 つの元 w を含む，ならば，その束は，又，性質 $K(B,w)$

の双対の性質 $K^*(B, w^*)$ を持つ1つの元 w^* を含む（この逆は，一般の双対の原理をここに適用することによって得られる）。

さて，モジュラ束 L に含まれる $(n+1)$-次元ブール代数を B とし，B の最小元を v，最大元を u，原子元を $b_i(i=0, 1, \cdots, n)$ で表わし，性質 $K(B, w)$ を持った元を w で表わすとする。さらに $b_{ij}=b_i \cup b_j$，b_i と b_{ij} の B における補元を b'_i, b'_{ij} とおく。最後に $t_{ij}=(w \cap b_{ij}) \cup b'_{ij}$ とおいて，$w^*=\bigcap_{i=0}^{n-1} t_{in}$ とする。このように定めた w^* が，B のすべての双対原子元 b'_i の区間 $[v, u]$ における相対補元であることを示そう。

1. $i \neq j$ のとき，次のことが成り立つ：

$$t_{ij} \cup b_j=[(w \cap b_{ij}) \cup b'_{ij}] \cup b_j=[(w \cap b_{ij}) \cup b_j] \cup b'_{ij}$$
$$=(b_i<b_{ij} \text{ とモジュラ束であることとより})$$
$$=[(w \cup b_j) \cap b_{ij}] \cup b'_{ij}=(u \cap b_{ij}) \cup b'_{ij}$$
$$=b_{ij} \cup b'_{ij}=u,$$
$$t_{ij} \cap b'_j=[(w \cap b_{ij}) \cup b'_{ij}] \cap b'_j$$
$$=(b'_{ij}<b'_j \text{ とモジュラ束であることとより})$$
$$=[(w \cap b_{ij}) \cap b'_j] \cup b'_{ij}$$
$$=(b_{ij} \cap b'_j=b_i \text{ であるから})$$
$$=(w \cap b_i) \cup b'_{ij}=v \cup b'_{ij}=b'_{ij}.$$

対称性から，結局次が得られる：

(2) $$t_{ij} \cup b_i=t_{ij} \cup b_j=u \quad (i \neq j\,;\, i,\ j=0, 1, \cdots, n).$$

(3) $$t_{ij} \cap b'_i=t_{ij} \cap b'_j=b'_{ij} \quad (i \neq j\,;\, i,\ j=0, 1, \cdots, n).$$

2. $t_{in}=(w \cap b_{in}) \cup b'_{in} \geqq b'_{in} \geqq b_j$（ただし，$j \neq i, n$）が成り立つから，(1)と(2)とより，まず

$$w^* \cup b'_n=(b'_k=\bigcup_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} b_i \text{ であるから})$$
$$=\bigcap_{i=0}^{n-1} t_{in} \cup \bigcup_{i=0}^{n-1} b_i=\bigcap_{i=0}^{n-1} (t_{in} \cup b_i)=\bigcap_{i=0}^{n-1} u=u$$

が成り立つ。

つぎに $j \neq n$ のとき，$t_{jn} \geqq b_i$（ここで $i \neq j,\ n$），即ち $t_{jn} \geqq \bigcup_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1} b_i$ が成り立つ。

モジュラ則を適用して，

$$w^* \cup b'_j = \bigcap_{i=0}^{n-1} t_{in} \cup \bigcup_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} b_i = \left[\bigcap_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n-1} t_{in} \cap t_{jn}\right] \cup \bigcup_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n-1} b_i \cup b_n$$

$$= \left\{\left[\bigcap_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n-1} t_{in} \cup \bigcup_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n-1} b_i\right] \cap t_{jn}\right\} \cup b_n$$

この角かっこの中に，(1)と(2)とを適用して，

$$w^* \cup b'_j = (u \cap t_{jn}) \cup b_n = t_{jn} \cup b_n = u \quad (j=0, 1, \cdots, n-1)$$

が得られる。従って，$j=0, 1, \cdots, n$ に対して常に $w^* \cup b'_j = u$ が成り立つ。

3. (3)を適用して，まず，

$$w^* \cap b'_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} t_{in} \cap b'_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} (t_{in} \cap b'_n) = \bigcap_{i=0}^{n-1} b'_{in} = v$$

を得る。

つぎに，$j \neq n$ のとき，

$$w^* \cap b'_j = \bigcap_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n-1} t_{in} \cap t_{jn} \cap b'_j = \bigcap_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n-1} t_{in} \cap b'_{jn} = \bigcap_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n-1} t_{in} \cap b'_n \cap b'_j$$

$$= \bigcap_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n-1} (t_{in} \cap b'_n) \cap b'_j = \bigcap_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n-1} b'_{in} \cap b'_j = b_j \cap b'_j = v$$

が得られる。従って $j=0, 1, \cdots, n$ に対し常に $w^* \cap b'_j = v$ が成り立つ。

2.3. 定理．n-分配束の双対，部分束，準同型像は又 n-分配束である。

証明． モジュラ束の双対，部分束，準同型像がモジュラ束であることは既に知られている。さて，n-分配束 L の双対を L^D とおくと，L^D は双対 n-分配束である。ところが 2.1 によって，L^D においては(B)の双対が成り立たない。従って 2.2 により(B)が成り立たない。故に L^D は n-分配束である。

もし R を n-分配束 L の部分束とすると，任意の $n+2$ 個の元 $x, y_0, \cdots, y_n \in R$ に対して，

$$D_n : x \cup \bigcap_{i=0}^{n} y_i = \bigcap_{j=0}^{n} \left(x \cup \bigcap_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} y_i\right)$$

が成り立つ。従って R は n–分配束である。

最後に，L^* を束 L のある準同型写像 φ による像とすると，$L\sim L^*$ である。L^* の任意の $n+2$ 個の元 $x^*, y_0^*, \cdots, y_n^*$ に対して，準同型写像の定義より，$\varphi(x)=x^*$, $\varphi(y_0)=y_0^*$, $\varphi(y_1)=y_1^*, \cdots, \varphi(y_n)=y_n^*$ となるような元 $x, y_0, y_1, \cdots, y_n$ が L に存在する。従って L が n–分配束であれば，

$$x^*\cup\bigcap_{i=0}^{n} y_i^*=\varphi(x)\cup\bigcap_{i=0}^{n}\varphi(y_i)=\varphi(x)\cup\varphi\left(\bigcap_{i=0}^{n} y_i\right)=\varphi\left(x\cup\bigcap_{i=0}^{n} y_i\right)$$
$$=\varphi\left[\bigcap_{j=0}^{n}\left(x\cup\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} y_i\right)\right]=\bigcap_{j=0}^{n}\varphi\left(x\cup\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} y_i\right)$$
$$=\bigcap_{j=0}^{n}\left[\varphi(x)\cup\varphi\left(\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} y_i\right)\right]=\bigcap_{j=0}^{n}\left[\varphi(x)\cup\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\varphi(y_i)\right]$$
$$=\bigcap_{j=0}^{n}\left[x^*\cup\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} y_i^*\right]$$

が成り立つ。従って，L^* は n–分配束である。

III. イ デ ア ル 束

束 L の空でない部分集合 I は，次の条件を満たすとき，L の**イデアル**と呼ばれる：

（Ⅰ） $a, b\in I$ ならば $a\cup b\in I$,

（Ⅱ） $a\in I$, $x\in L$ ならば $a\cap x\in I$。

この定義において，条件（Ⅱ）は次の（Ⅲ）によって置きかえることができる：

（Ⅲ） $a\in I$, $y\leqq a$ ならば $y\in I$。

何故かと言えば，もし $a\in I$, $y\leqq a$ でしかも I が（Ⅱ）を満たしていれば，$y=y\cap a\in I$ である：逆に，もし $a\in I$, $x\in L$ でしかも I が（Ⅲ）を満たしていれば，$a\cap x\leqq a$ であるから $a\cap x\in I$。

束 L の任意の元 a に対し，$x\leqq a$ を満たす元の全体を $(a]$ で表わすと，これは1つのイデアルである。これを L の**主イデアル**と言う。

束 L のイデアルは，L の部分束であるが，L のイデアルすべての集合 $I(L)$

は，集合の包含関係に関して束を形づくる。又 $I(L)$ は条件完備であり，かつ結びに関して完備である（SZÁSZ [9], p. 162）。一方，条件完備な束は最大元，最小元を付加することによって，完備束を得ることも知られている（SZÁSZ [9], p. 65）。

有限個のイデアルの結びと交わりに関する次の命題が STONE（[8], 定理18と定理31）によって証明されている。

3.1. STONE の定理. **束 L のイデアル $I_1, \cdots, I_n$ の $I(L)$ における交わり $I_1 \cap \cdots \cap I_n$ は**

$$x = a_1 \cap \cdots \cap a_n \quad (a_j \in I_j \,;\, j = 1, \cdots, n)$$

の形の元 $x \in L$ から成っている。

一方，それらの $I(L)$ における結び $I_1 \cup \cdots \cup I_n$ は

$$y \leqq a_1 \cup \cdots \cup a_n \quad (a_j \in I_j \,;\, j = 1, \cdots, n)$$

なる不等式を満たす元 $y \in L$ から成っている。

3.2. 系. **束 L の主イデアルすべての集合 $I_0(L)$ は $I(L)$ の部分束であり，L に同型である。**

これから次の定理が導き出される。

3.3. 定理. **束 L のイデアル束 $I(L)$ が n–分配的であるための必要十分条件は，L が n–分配的であることである。**

証明.（必要性）$I(L)$ は n–分配束であるとする。3.2. より，束 L の主イデアルすべての集合 $I_0(L)$ は $I(L)$ の部分束であり，しかも L と同型である。従って L は n–分配束である。

（十分性）逆に束 L は n–分配的であるとする。$I(L)$ の任意の $n+2$ 個のイデアル $X, Y_0, Y_1, \cdots, Y_n$ をとると

$$X \cup \bigcap_{i=0}^{n} Y_i \leqq \bigcap_{j=0}^{n} \Bigl(X \cup \bigcap_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} Y_i \Bigr)$$

は常に成り立つから，$I(L)$ が n-分配的であることを示すためには，

(1) $$\bigcap_{j=0}^{n}\left(X\cup\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}Y_i\right)\leqq X\cup\bigcap_{i=0}^{n}Y_i$$

を証明すれば十分である（モジュラ束のイデアル束がモジュラ束であることは既に知られている)。

この目的のために，今この左辺のイデアルの任意の元 t を考えると，$j=0, 1, \cdots, n$ の各々に対して $t\in X\cup\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}Y_i$ である。従って 3.1 によって $j=0, 1, \cdots, n$ の各々に対して，不等式

$$t\leqq x_j\cup y_j\ \left(x_j\in X,\ y_j\in\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}Y_i\right)$$

を満たす x_j, y_j が存在する。この $y_j\in\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}Y_i$ に対して 3.1 を適用すると，各々の $j=0, 1, \cdots, n$ に対して，

(2) $$y_j=\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}z_{ji}\ (z_{ji}\in Y_i\ ;\ i\neq j\ ;\ i=0, 1, \cdots, n)$$

を満たす元 z_{ji} が存在する。ここで $\bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}z_{ji}=z_i$ とおくと，$z_i\in Y_i$ であり，(2) より $y_j\leqq z_{ji}$ ($j\neq i$) が成り立つから，

$$y_j\leqq\bigcup_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n}z_{ki}=z_i\ (i\neq j\ ;\ i, j=0, 1, \cdots, n)$$

が成り立つ。従って

$$y_j\leqq\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}z_i\ (j=0, 1, \cdots, n)$$

である。ここで $\bigcup_{j=0}^{n}x_j=x(\in X)$ とおくと，

$$t\leqq x_j\cup y_j\leqq x\cup\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}z_i\ (j=0, 1, \cdots, n)$$

が成り立つ。従って，L が n-分配束であることより，不等式

(3) $$t\leqq\bigcap_{j=0}^{n}\left(x\cup\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}z_i\right)=x\cup\bigcap_{i=0}^{n}z_i$$

が成り立つ。$z_i\in Y_i$ であったから，

$$\bigcap_{i=0}^{n} z_i \in \bigcap_{i=0}^{n} Y_i,\quad x \cup \bigcap_{i=0}^{n} z_i \in X \cup \bigcap_{i=0}^{n} Y_i$$

が成り立つ。(3)と $X \cup \bigcap_{i=0}^{n} Y_i$ がイデアルであることから，$t \in X \cup \bigcap_{i=0}^{n} Y_i$。故に(1)が成り立つ。

3.4 系. n-分配束は適当に選ばれた n-分配的な完備束のある部分束と同型である。

証明. n-分配束のイデアル束 $I(L)$ はそれ自身完備であるか，あるいは前述のように最小元として空集合 O を付加することによって完備束を作ることが出来る。しかもその完備束は n-分配的である。従って，3.2によって，L はこの完備束の部分束なる $I_0(L)$ と同型である。

注

(1) HUHN は，任意の自然数 $n(>1)$ に対して類 $\boldsymbol{D}_{n-1}$ が類 $\boldsymbol{D}_n$ の真部分である，ことを証明した。

(2) $(n+1)$-次元ブール代数とは，$n+1$ 個の元からなる集合のベキ集合に，集合の包含関係を順序として導入して得た束 2^{n+1} と同型な束を意味する。

(3) この判定条件の $n=1$ の場合が BIRKHOFF の分配性の判定条件である(BIRKHOFF [2], p. 118)。

(4) 帰納法によって証明する。

$n=1$ のとき

$$p_1 \cup q_1 = p_1 \cup q_1.$$

$n=k$ のとき成り立つとすると，

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} p_i \cup \bigcup_{i=1}^{k+1} q_i = \left(\bigcap_{i=1}^{k} p_i \cap p_{k+1}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} q_i \cup q_{k+1}\right)$$

$$= \left[\left(\bigcap_{i=1}^{k} p_i \cap p_{k+1}\right) \cup \bigcup_{i=1}^{k} q_i\right] \cup q_{k+1} = \text{(モジュラ法則により)}$$

$$= \left[\left(\bigcap_{i=1}^{k} p_i \cup \bigcup_{i=1}^{k} q_i\right) \cap p_{k+1}\right] \cup q_{k+1} = \text{(再びモジュラ法則により)}$$

$$= \left(\bigcap_{i=1}^{k} p_i \cup \bigcup_{i=1}^{k} q_i\right) \cap (p_{k+1} \cup q_{k+1}) = \bigcap_{i=1}^{k} (p_i \cup q_i) \cap (p_{k+1} \cup q_{k+1})$$

$$= \bigcap_{i=1}^{k+1} (p_i \cup q_i).$$

参 考 文 献

[1] K. A. BAKER, Equational classes of modular lattices, *Pacific J. Math.*, **28** (1969), 9–15.

[2] G. BIRKHOFF, Applications of lattice algebra. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **30** (1934) 115–122.

[3] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, 3rd. ed., AMS Colloq. Publ. no. **25**, 1973.

[4] A. P. HUHN, Schwach distributive Verbände, *Acta F. R. N. Univ. Comenianae (Bratislava)*, **1971**, 51–56.

[5] A. P. HUHN, Schwach distributive Verbände. I, *Acta Sci. Math.*, **33** (1972), 297–305.

[6] A. P. HUHN, Schwach distributive Verbände. II, *Acta Sci. Math.*, **46** (1983), 85–98.

[7] B. JÓNSSON, Modular lattices and Desargues' theorem, *Math Scand.*, **2** (1954), 295–314.

[8] M. H. STONE, The theory of representations for Boolean algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* **40** (1936) 37—111.

[9] G. SZÁSZ, *Introduction to Lattice Theory*, Acadenmic Press N. Y. and London, (1963).